Vytauto Didžiojo Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai 1939

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université Vytautas le Grand 1939

XIII T.

1 sąsiuvinys

Matematikos skyrius

Section de Mathématiques

Redaktorius e. o. prof. **IG. KONČIUS**

21D36

Kaunas ◆ Kooperatinė „RAIDĖS" spaustuvė Kaune ◆ 1939

Vytauto Didžiojo Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai 1939

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université Vytautas le Grand 1939

XIII T.

1 sąsiuvinys

Matematikos skyrius

Section de Mathématiques

Redaktorius e. o. prof. **IG. KONČIUS**

Kaunas ◆ Kooperatinė „RAIDĖS" spaustuvė Kaune ◆ **1939**

ÜBER DIE INTEGRALGLEICHUNGEN DER LAMÉSCHEN UND VERWANDTEN FUNKTIONEN.

VON

O. E. STANAITIS

IN KAUNAS.

Sucht man für die Lösungen der Mathieuschen und Laméschen Differentialgleichungen ähnlich einfache Integraldarstellungen zu gewinnen, wie sie für die Besselschen und verwandte Funktionen bekannt sind, so wird man zu den zuerst von Whittaker[1] angegebenen Integralgleichungen für die Mathieuschen Funktionen und Laméschen Polynome geführt. Die symmetrischen Kerne $K(s,t)$ dieser Integralgleichungen sind überall im Grundgebiete $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ stetig und besitzen stetige Ableitungen. Das Verhalten dieser Kerne im Grundgebiete ist also von dem der Greenschen Funktionen, deren Ableitungen für $s=t$ unstetig werden, wesentlich verschieden.

Die grosse Bedeutung der Integralgleichungen für die Theorie dieser Funktionen drückt Humbert in folgenden Worten aus: „Ce n'est que beaucoup plus tard que M. E. T. Whittaker trouva l'équation intégrale à laquelle statisfont toutes les solutions périodiques de cette équation différentielle, découverte fondamentale, qui a suscité de nombreux travaux de l'école britannique contemporaine, et qui a rejeté dans l'ombre presque tout ce qui avait été fait auparavant, si ce n'est les belles recherches de Lindemann sur la solution générale de l'équation". Und weiter spricht er die Vermutung aus: „C'est probablement dans le domaine des équations intégrales que l'on pourra obtenir les plus fructueux résultats. Ainsi, nous l'avons vu, l'équation intégrale des fonctions de Mathieu a jeté un jour nouveau sur leur théorie: il serait intéressant de refaire l'étude des fonctions de Lamé à partir de leur équation intégrale: peut-être arriverait-on ainsi à des propriétés nouvelles"[2].

[1] *Whittaker — Watson*, Modern Analysis, Cambridge (1935), 19.22, 23.6, 23.61. Es sei bemerkt, dass eine Integralgleichung für die Mathieuschen Funktionen sich schon bei Abraham und Brillouin befindet, aber ihre fundamentale Bedeutung für die Theorie dieser Funktionen gewinnen die Integralgleichungen erst durch Whittaker. Vlg. Abraham, Über einige beim Schwingungsproblem auftretende Differentialgleichungen, Math. Ann. Bd. 51 und Brillouin, Propagation de l'électricité, Cours du Collége de France 1901—1902 (Paris, 1904).

[2] *Humbert*, Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu, Fasc. X du Mémorial des Sciences mathématiques, Paris (1926), S. 27 u. 46.

Im wesentlichen wird der Zusammenhang des Eigenwertproblems

$$(I) \quad L_s + \lambda w \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dw}{ds}\right) + \left(q(s)+\lambda\right) w = 0$$

für das Intervall $a \leqq s \leqq b$ mit den Randbedingungen $w(a) = w(b)$, $w'(a) = w'(b)$, wobei $p(a) = p(b)$, $q(a) = q(b)$ vorausgesetzt ist, mit der homogenen Integralgleichung

$$(II) \qquad w(s) = \mu \int_a^b K(s,t)\, w(t)\, dt$$

durch folgenden Satz festgelegt:

Jede symmetrische periodische überall im Grundgebiete $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ reguläre, d. h. mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(III) \quad L_s(K) - L_t(K) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(p(s)\frac{\partial K}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial K}{\partial t}\right) + \left(q(s) - q(t)\right) K = 0$$

gibt zu einer Integralgleichung (II) Anlass, deren Eigenfunktionen wieder Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (I) sind[3].

Das umgekehrte ist jedoch keineswegs richtig. Im allgemeinen bilden die Lösungen der Integralgleichung (II) nur einen Teil der Eigenfunktionen des durch die Periodizitätsforderung implizierten Eigenwertproblems der Differentialgleichung (I). Man hat also hier keine vollständige Äquivalenz der Eigenwertprobleme von Differential- und Integralgleichungen, wie es der Fall ist, wenn die Greensche Funktion die Vermittlung übernimmt.

Um solche Integralgleichungen (II), die die Theorie dieser Funktionen in neuem Licht erscheinen lassen, aufstellen zu

---

[3] *Ince*, On the connexion between linear differential systems and integral equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Bd. 42 (1922), S. 43. Vgl. auch v. Koppenfels, Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, Math. Ann., Bd. 112 (1935), S. 24.

können, muss man im Grundgebiete $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ reguläre symmetrische periodische Lösungen $K(s,t)$ der partiellen Differentialgleichung (III) besitzen. Soweit ich feststellen konnte, ist zur Auffindung solcher Lösungen der Differentialgleichung (III) bisher keine systematische Methode angewandt worden. Einen Kern für die Integralgleichungen der Mathieuschen Funktionen versucht Whittaker[4] aus einer allgemeineren Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung zu gewinnen, indem er die Lösung in die neuen Koordinaten transformiert und die bekannte Form der Lösung heranzieht. Wie aber Whittaker und die anderen Autoren[5] zu den weiteren Kernen für die Integralgleichungen der Mathieuschen Funktionen und Laméschen Polynome gokommen sind, lässt sich nicht einsehen und es fehlt jede Anmerkung darüber. Es scheint, dass man zur Integralgleichung (II) im allgemeinen ohne weiteres folgendermassen kommt: durch direkte Verifikation weist man nach, dass eine gewisse vermutete Funktion eine den Bedingungen genügende Lösung der partiellen Differentialgleichnug (III) ist. Dieser Weg, der gewisse technische Kunstgriffe voraussetzt und ziemlich grossen Aufwand von Rechnung benötigt, wird in wesentlich komplizierteren Fällen kaum zum Ziele führen. Es ist bemerkenswert, dass die explizite Aufstellung der Integralgleichungen (II) in besonders deutlicher Weise zeigt, wie wenig die Auffindung der „allgemeinen" Lösung für die Lösung dieses Problems nützt[6]. Auch einzelne Versuche[7], die Lücke durch spezielle Ansätze und Koordinatentransformation auszufüllen, bedeuten für die explizite Auffindung von Kernen kei-

---

[4] *Whittaker*, l. c[1], 19.21.

[5] Vgl. z. B. *Scharma*, An integral equation satisfied by the Lamé's functions, Journal de math. pures et appl., B. 16, fasc. II (1937), S. 199.

[6] Es ist von Interesse hierzu zu bemerken, in welcher Reihenfolge die einzelnen Integralgleichungen der Mathieuschen und Laméschen Funktionen publiziert worden sind: Whittaker 1912, Whittaker 1915, Poole 1921, Whittaker 1927, Scharma 1937. Vgl. l. c.[1], l. c.[7], l. c.[5].

[7] Vgl. *Poole*, On certain classes of Mathieu functions, Proc. London Math. Soc., Bd. 20 (1921), S. 358 und

v. Koppenfels, l. c.[3], S. 40. Es lässt sich hier beispielsweise auch nicht einsehen, wie man in einfacher Weise durch spezielle Ansätze zu den anderen in der Literatur bekannten Integralgleichungen der Laméschen Polynome gelangen kann.

nen wesentlichen Fortschritt. Dabei besitzen diese in den letzten Jahrzehnten von einzelnen Forschern aufgefundenen Lösungen, Kerne der Integralgleichung (II), häufig keine sichtbare gegenseitige Beziehung.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist ein Verfahren anzugeben, welches in einfacher Weise spezielle Scharen von Lösungen der partiellen Differentialgleichung (III) liefert, und zu zeigen, wie man systematisch die gewünschten wichtigen Beispiele erhalten kann. Dabei ergeben sich die in der Literatur bekannten wichtigen Beispiele als Spezialfälle dieser Scharen von Lösungen, und man kommt zugleich zu einer unbeschränkten Anzahl neuer Integralgleichungen (II). Die bekannten Integralgleichungen dieser Funktionen werden somit zu einem systematischeren Bilde ergänzt.

Der Grundgedanke, der hier zum Ziele führt, besteht in folgendem: zu einer Differentialgleichung

$$\text{(IV)} \quad \frac{d}{ds}\left(g(s)\frac{dw}{ds}\right) + \left(r(s)+\mu\right) w = 0,$$

deren Lösung bekannt ist, bilden wir die partielle Differentialgleichung

$$\text{(V)} \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(g(s)\frac{\partial K}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(g(t)\frac{\partial K}{\partial t}\right) + \left(r(s) - r(t)\right) K = 0,$$

welche durch bestimmte Koordinatentransformationen in die partielle Differentialgleichung (III) übergeführt wird; transformiert man nun die bekannte Lösung $K = w(s)\,w(t)$ der partiellen Differentialgleichung (V) in die neuen Koordinaten, so erhält man Lösungen der partiellen Differentialgleichung (III). Es leuchtet ein, dass dabei eine besondere Rolle der Produktansatz spielt. Die Symmetrie der partiellen Differentialgleichung (V) ist hier keineswegs notwendig; wesentlich ist es, dass die Lösungen einer partiellen Differentialgleichung, die in die Differentialgleichung (III) überführbar ist, bekannt sind oder sich durch die bekannten speziellen Ansätze leicht finden lassen. Hat man einen unsymmetrischen Fall, so treten anstatt der einen zwei verschiedene Differentialgleichungen (IV) auf.

Die Frage nach den allgemeinsten Koordinatentransformationen, welche die partielle Differentialgleichung (V) in die

Differentialgleichung (III) überführen, lässt sich nach einer Methode, die G. Darboux[8] bei den équations harmoniques entwickelt hat, lösen. In Anlehnung an diese klassischen Untersuchungen wird das Verfahren entwickelt.

Ich habe mich, bei der ersten Anwendung des dargelegten Verfahrens, im wesentlichen auf die Laméschen Funktionen beschränkt, da diese — wie mir scheint — geeignet sind, auf die Tragweite der Methode Licht zu werfen. Andererseits sind in der Literatur nur einzelne Beispiele von Integralgleichungen der Laméschen Polynome bekannt. Auch dieser Fall, welcher bekanntlich einen Spezialfall der Laméschen Funktionen bildet, ist bisher keineswegs vollständig geklärt und hat zu Arbeiten Anlass gegeben, deren Inhalt im wesentlichen der Nachweis bildet, dass der Kern der Integralgleichung eine Lösung der partiellen Laméschen Differentialgleichung (III) ist[9]. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall der Laméschen Polynome erledigt, und es werden Integralgleichungen für die Laméschen Funktionen angegeben, deren Eigenfunktionen im allgemeinen keine Laméschen Polynome sind.

Die in der Literatur bekannten Beispiele von Integralgleichungen der Laméschen Polynome legen es nahe, bezüglich des Zusammenhangs (I) und (II) die Differentialgleichung der Legendreschen Funktionen h^{ter} Ordnung besonders hervorzuheben (§ 2). Um diesen Zusammenhang durch Funktionen, deren Eigenschaften bekannt sind, auszudrücken, führen wir die Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen ein. Unter allen Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung sind diejenigen Lösungen $K(\vartheta, \varphi)$ von besonderer Bedeutung, die sich als Spezialfälle aus der Laplaceschen Kugelfunktion n^{ter} Dimension ergeben. Zu bemerkenswerten speziellen Lösungen, die in der Laplaceschen Kugelfunktion n^{ter} Dimension enthalten sind, kommt man, wenn man den bekannten Laplaceschen Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

---

[8] *Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 2 (1889), S. 192.

[9] *Scharma*, l. c.[5].

in Polarkoordinaten transformiert und die „allgemeine“ Lösung dieses Ausdrucks dem Produktansatze gemäss spezialisiert. Anschliessend geben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Laplacescher Kugelfunktionen an, die in der Literatur zu fehlen scheint.

Weiter werden allgemeine Transformationsformeln angegeben, welche die Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen in die partielle Differentialgleichung der Laméschen Funktionen überführt (§ 3). Das Wesentliche bei diesen Formeln ist, dass bestimmte Ausdrücke sich durch spezielle Wahl der Konstanten vereinfachen lassen und somit zu eleganten Lösungen der partiellen Laméschen Differentialgleichung Anlass geben. Anschliessend wird gezeigt, wie die bekannten Lösungen der Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen zur Gewinnung von Integralgleichungen verwandter Funktionen nutzbar gemacht werden können.

Die Resultate der Paragraphen 2 und 3 führen direkt zu Integralgleichungen der Laméschen Polynome und Funktionen (§ 4). Man kommt dabei fast unmittelbar zu bemerkenswerten Folgerungen, die für die Theorie der Integralgleichungen der Laméschen Polynome grundlegend zu sein scheinen. Zum Schluss dieses Paragraphen werden explizite Integralgleichungen für die Laméschen Funktionen angegeben. Solche Integralgleichungen, die im gewissen Sinne keine polynomischen Lösungen besitzen, scheinen bisher unbekannt zu sein.

Schliesslich scheint es mir nicht überflüssig, die bekannten Integralgleichungen der Mathieuschen Funktionen zunächst durch Grenzübergang aus dem Laméschen Fall und dann durch direkte Anwendung der Methode auf die Mathieusche partielle Differentialgleichung zu gewinnen. An Hand dieses Beispiels wird die natürliche Grundlage des Verfahrens auch für die verwandten Funktionen mehr ins Licht gerückt. Dabei kommt man natürlich zu einer unbeschränkten Anzahl neuer Integralgleichungen (§ 6).

Um nachweisen zu können, dass alle in der Literatur bekannten Integralgleichungen der Laméschen Polynome in den allgemeineren Resultaten als Spezialfälle enthalten sind, werden Bemerkungen zu den Integralgleichungen der Laméschen Funktionen für den Fall gemacht, wenn den Untersuchungen die Weierstrasssche $\wp$ Funktion zugrunde gelegt ist. Dabei

kommt man zu dem wichtigen Ergebnis, dass alle in der Literatur bekannten Kerne, deren Eigenfunktionen Laméssche Polynome sind, Laplacesche Kugelfunktionen sind.

Es sei zum Schluss bemerkt, dass der Grundgedanke sich auf lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit periodischen Koeffizienten übertragen lässt. Man hat hier die Bedingung zu beachten, dass die beiden Differentialoperatoren $L_s(K)$ und $L_t(K)$ zueinander adjungiert sein müssen.

Inhalt.

§ 1. Bemerkungen zu den Grundlagen.

§ 2. Die Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen.

§ 3. Transformationsformeln.

§ 4. Integralgleichungen für die Laméschen Polynome und Funktionen.

§ 5. Bemerkungen über die Integralgleichungen der Laméschen Polynome und Funktionen, wenn den Untersuchungen die Weierstrasssche $\wp$ Funktion zugrunde gelegt wird.

§ 6. Integralgleichungen für die Mathieuschen Funktionen.

§ 1.

Bemerkungen zu den Grundlagen.

Geht man von einem System zweier Differentialgleichungen

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + r(x)\frac{du}{dx} + \Big(q(x) + \lambda\Big)u = 0, \tag{1}$$

$$p_1(y)\frac{d^2v}{dy^2} + r_1(y)\frac{dv}{dy} + \Big(q_1(y) + \lambda\Big)v = 0 \tag{2}$$

aus, wobei λ eine Konstante bedeutet, so lässt sich die partielle Differentialgleichung, welche durch den Produktansatz in die

Differentialgleichungen (1) und (2) zerspalten wird, in der Form

$$(3)\quad p(x)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - p_1(y)\frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + r(x)\frac{\partial K}{\partial x} - r_1(y)\frac{\partial K}{\partial y} + \Big(q(x) - q_1(y)\Big)K = 0$$

schreiben. Durch bekannte Transformationen lässt sich die Differentialgleichung (3) in unendlich vielfacher Weise in eine Differentialgleichung der Form

$$(4)\qquad \alpha(x)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \beta(y)\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$$

überführen[10], wobei $\alpha(x)$ und $\beta(y)$ durch die bekannten Koeffizienten von (3) und durch die Transformation bestimmte Funktionen sind. Für die weiteren Untersuchungen ist die folgende sich aus dieser Tatsache unmittelbar ergebende Bemerkung von Wichtigkeit: Die Mannigfaltigkeit der speziellen Lösungen von (3) lässt sich wesentlich erhöhen, wenn man die speziellen Ansätze auf die verschiedenen Differentialgleichungen (4), deren Anzahl unbegrenzt ist, anwendet.

Dem Vorgange Darboux's entsprechend legen wir unseren weiteren Untersuchungen die klassische Normalform

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t} = F(s,t)\,K$$

der Differentialgleichung (3) zugrunde, wo die Funktion $F(s,t)$ die Form $F(s,t) = \varphi(s+t) - \chi(s-t)$ hat. Auf diese Weise gelangen wir zu wichtigen Formeln, die in bequemer und rascher Weise zum Ziele führen. Die Frage, ob die Differentialgleichung (5) in eine spezielle Differentialgleichung überführbar ist, beantwortet die Funktionalgleichung

$$(6)\qquad 2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}S + 3\frac{\partial F}{\partial s}S' + FS'' = 2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}T + 3\frac{\partial F}{\partial t}T' + FT'',$$

---

[10] Vgl. hierzu Darboux, l. c.[8].

die zugleich alle Koordinatentransformationen liefert, welche die Differentialgleichung (5) in eine Differentialgleichung der gleichen Form überführt. Dabei ist S eine Funktion von s und T eine Funktion von t allein. Die Transformationsformeln sind durch

$$s_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad t_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{T}} \tag{7}$$

gegeben.

Zu dem für das Weitere wichtigen Ergebnis wird man also folgendermassen geführt: man hat zunächst festzustellen, ob es solche Lösungen $S(s)$ und $T(t)$ der Funktionalgleichung (6) gibt, welche durch die Transformationsformeln (7) die Differentialgleichung (5) in die spezielle Differentialgleichung überführen. Falls solche Funktionen existieren, hat man die weitere Aufgabe, sie alle aufzufinden, um somit zu den allgemeinsten Koordinatentransformationen (7), welche dies leisten, zu gelangen. Transformiert man nun die bekannte Lösung $K = u(x)v(y)$ der Differentialgleichung (3) in die neuen Koordinaten, so erhält man eine Schar von Lösungen der speziellen Differentialgleichung.

Wir bemerken: Hat man die allgemeine Lösung oder spezielle Lösungen einer von diesen Differentialgleichungen, so hat man zugleich die allgemeine Lösung oder spezielle Lösungen aller Differentialgleichungen, die alle durch analoge Transformationen aus einer hervorgehen.

Zu diesen Ausführungen sei ein bemerkenswertes Beispiel hervorgehoben, das zu negativem Ergebnis führt. Ersetzt man nämlich (1) und (2) durch eine Besselsche Differentialgleichung

$$\varrho^2 \frac{d^2z}{d\varrho^2} + \varrho \frac{dz}{d\varrho} + (\varrho^2 - n^2) Z = 0,$$

so erhält man eine symmetrische partielle Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + x \frac{\partial K}{\partial x} - y \frac{\partial K}{\partial y} + (x^2 - y^2) K = 0,$$

welche durch die Koordinatentransformation

$$t = lnx - lny$$
$$s = lnx + lny$$

in die Normalform

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t} = \tfrac{1}{4}\,(-e^{s+t} + e^{s-t})\,K$$

übergeht. Fragt man nun nach Koordinatentransformationen, welche diese Differentialgleichung in die Lamésche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t} = n(n+1)\,k^2 \left(sn^2(s+t) - sn^2(s-t) \right) K$$

überführen, so ergibt sich, dass keine solche existieren; denn die Funktionalgleichung (6) ergibt für S und T die leicht lösbaren Differentialgleichungen

$$S'' + 3S' + 2S = 2c,$$
$$T'' - 3cthtT' + 2T = 2c,$$

aus deren allgemeinen Lösungen man unmittelbar entnimmt, dass die Transformationsformeln (7) keine elliptischen Funktionen enthalten können. Man kommt also zu einem bemerkenswerten Resultat: Die Lamésche partielle Differentialgleichung besitzt keine Lösungen, welche sich in symmetrischer Weise durch die Besselschen Funktionen ausdrücken lassen.

§ 2.

Die Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen.

Die in der Literatur bekannten Integralgleichungen der Laméschen Polynome legen es nahe, den folgenden Untersuchungen die bekannte Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{h^2}{1-x^2}\right)u = 0$$

zugrunde zu legen. Für $\lambda = n(n+1)$ und $h = 0, 1, 2, \ldots, n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ sind die Lösungen, welche an beiden Endpunkten des Intervalles $-1 \leqq x \leqq 1$ regulär sind, bekanntlich Legendresche Funktionen h^{ter} Ordnung

$$u = P_{n,h}(x) = \sqrt{1 - x^2}^{\,h} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) \,, \tag{9}$$

wobei $P_n(x)$ ein Legendresches Polynom ist[11]. Für alle anderen Werte von λ und h erhalten wir Potenzreihen, die nach elementaren Regeln für $|x| < 1$ konvergieren. Wir bemerken: Die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Potenzreihen werden übersichtlich, wenn man von der Differentialgleichung (8) den Faktor $\sqrt{1-x^2}^{\,h}$ abspaltet, d. h. durch die Substitution $u = \sqrt{1-x^2}^{\,h}\, \xi$ zur Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\xi'' - 2(1+h)x\xi' + \big(n(n+1) - h(h+1)\big)\xi = 0 \tag{10}$$

übergeht, deren Lösung

$$\xi_{n,h}(x) = c_1 \xi_1(x) + c_2 \xi_2(x)$$

ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8) in der Form

$$u_{n,h}(x) = \sqrt{1-x^2}^{\,h}\, \xi_{n,h}(x) \tag{11}$$

darstellbar ist, wobei $\xi_{n,h}(x)$ für beliebige Werte der Konstanten c_1, c_2 eine Potenzreihe liefert, deren Konvergenzradius $r = 1$ ist. Man braucht hier kaum hervorzuheben, dass in der allgemeinen Lösung (11) der Differentialgleichung (8) die Lösungen (9) als Spezialfälle enthalten sind.

Wählt man für (2) die triviale Differentialgleichung

$$v'' + h^2 v = 0 \,, \tag{12}$$

wo die unabhängige Veränderliche φ sein soll, und setzt man

---

[11] Vgl. hierzu Courant - Hilbert, Methoden der Math. Physik, Bd. 1, 2. Aufl. (1931), S. 282 u. 441.

$x=\cos\vartheta$, so wird man durch (8) und (12) zu der partiellen Differentialgleichung (3) geführt, welche sich in der Form

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\right)+\lambda K=0 \tag{13}$$

schreiben lässt. Es sei bemerkt, dass diese Differentialgleichung, die bei den verschiedensten Fragen der mathematischen Physik auftritt, durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned} \tag{14}$$

aus dem Laplaceschen Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{15}$$

gewonnen werden kann, wenn man auf diese transformierte Differentialgleichung den Produktansatz

$$w = K(\vartheta,\varphi)\,f(r)$$

anwendet.

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (8) und (12) führen durch den Produktansatz

$$K = u(\vartheta)\,v(\varphi)$$

direkt zu den speziellen Lösungen der partiellen Differentialgleichung (13). Ist $\lambda = n(n+1)$ und $h = 0, 1, 2, \ldots, n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), so besitzt die Differentialgleichung (13) Lösungen der Form

$$K(\vartheta,\varphi) = (a_h\cos h\varphi + b_h\sin h\varphi)\,P_{n,h}(\cos\vartheta),$$

so dass wir in der Funktion

$$K_n(\vartheta,\varphi)=a_n P_n(\cos\vartheta)+\sum_{h=1}^{n}(a_{n,h}\cos h\varphi+b_{n,h}\sin h\varphi)P_{n,h}(\cos\vartheta) \tag{16}$$

eine von $2n+1$ willkürlichen linearen Parametern abhängige Lösung der Differentialgleichung (13) haben. Die symmetri-

schen Kugelfunktionen $\cos h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$, $\sin h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$ sind paarweise zueinander orthogonal und folglich linear unabhängig. Die Funktion heisst Laplacesche Kugelfunktion n^{ter} Dimension. Es sei noch die wichtige Tatsache hervorgehoben, dass es keine weiteren Lösungen von (13) gibt, die überall auf der Kugel regulär sind.

Die Lösung (11) führt zu den allgemeineren Lösungen

$$K(\vartheta,\varphi) = (a_{n,h}\cos h\varphi + b_{n,h}\sin h\varphi)\, u_{n,h}(\cos\vartheta) \tag{17}$$

der Differentialgleichung (13), wobei hier n und h beliebige reelle Werte annehmen können.

Zu einfachen der Form nach von (16) und (17) verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung (13) kommt man, wenn man die „allgemeine Lösung" der Laplaceschen Differentialgleichung (15) spezialisiert. Bekanntlich lässt sich solch eine Lösung von (15) in der Form

$$w=\chi(ax+by+cz)$$

schreiben, wobei χ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion bedeutet und $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ist. Führt man nun die Polarkoordinaten (14) ein und berücksichtigt, dass durch den Produktansatz

$$w=K(\vartheta,\varphi)f(r)$$

die „allgemeine Lösung" in zwei spezielle Funktionen übergehen muss, welche Lösungen von (13) und der Differentialgleichung

$$(r^2f')'-\lambda f=0$$

sein müssen, so kommt man unmittelbar zu den für das Folgende wichtigen Lösungen

$$K(\vartheta,\varphi) = (a\sin\vartheta\cos\varphi + b\sin\vartheta\sin\varphi + c\cos\vartheta)^n, \tag{18}$$

$$K(\vartheta,\varphi) = (a\sin\vartheta\cos\varphi + b\sin\vartheta\sin\varphi + c\cos\vartheta)^{-n-1}, \tag{19}$$

wobei $\lambda=n(n+1)$ und die Bedingung $a^2+b^2+c^2=0$ zu beachten ist. Wir bemerken noch hierzu, dass man aus den gewonnenen Lösungen durch Summations-, Integrations- und Differentiationsprozesse weitere bemerkenswerte Lösungen erhalten kann.

Es sei zur Lösung (18) noch folgendes bemerkt. Da wir in der Funktion (16) die allgemeinste mögliche auf der Kugel überall reguläre Lösung besitzen, so folgt hieraus, dass für $n=1, 2, 3, \ldots$ die Lösung (18) ein Spezialfall von (16) ist.

Anschliessend geben wir noch die allgemeine Lösung von (13) an, die in der bisherigen Literatur zu fehlen scheint. Durch Einführung geeigneter Koordinaten gelingt es nämlich die partielle Differentialgleichung (13) in die bekannte Eulersche[12] Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung bekannt ist, überzuführen. Setzt man beispielsweise

$$tg\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}=ix,$$

$$tg\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi}=\frac{i}{y},$$

so geht die Differentialgleichung (13) in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial y}+\frac{\lambda}{(x-y)^2}K=0 \tag{20}$$

über, welche für $\lambda=m(m-1)$ mit der Eulerschen Differentialgleichung vollständig übereinstimmt. Für $\lambda=n(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ lässt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (20) in der Form

$$K_n(x,y)=\frac{\partial^{2n}}{\partial x^n\partial y^n}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right) \tag{21}$$

schreiben, wobei X und Y willkürliche Funktionen von x und y allein sind. Es sei noch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (20) in der bemerkenswerten Form

$$K_n(x,y)=(x-y)^{n+1}W \tag{21a}$$

hervorgehoben, wobei

$$W=\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}\left(\varphi(\sqrt{u}+\sqrt{v})+\chi(\sqrt{u}-\sqrt{v})\right)$$

mit $(x-y)^2=u$, $(x+y)^2=v$ ist.

---

[12] Vgl. Darboux, l. c.[8], S. 54.

Im allgemeinen Falle $\lambda=n(n+1)$, (n beliebig) ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (20) in der Form

$$(21b)\quad K_n(x,y)=(y-x)^{-2n-1}\int_0^1 \varphi\Big((x+(y-x)t\Big)t^{-n-1}(1-t)^{-n-1}dt + \int_0^1 \chi\Big(x+(y-x)\,t\Big)\,t^n\,(1-t)^n\,dt\,,$$

wobei φ und χ willkürliche Funktionen bedeuten, darstellbar. Es ist zu beachten, dass für $2n=-1$ beide Integrale von (21b) identisch werden, und die Formel (21b) durch die folgende

$$(21c)\quad K_n(x,y)=\int_0^1 \varphi\Big(x+(y-x)t\Big)\,t^{-n-1}(1-t)^n\,dt + \int_0^1 \chi\Big(x+(y-x)\,t\Big)\,t^{-n-1}\,(1-t)^n\,ln\,\Big(t\,(1-t)\,(y-x)\Big)dt$$

zu ersetzen ist.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (13) kann in vielen Fällen den Schlüssel für die Lösung fundamentaler Probleme geben. Für die Behandlung der Randwertaufgabe ist jedoch, wie in der Einleitung bereits erwähnt, die allgemeine Lösung relativ wertlos, obgleich beispielsweise die Struktur der Lösung (21) in wunderbarer Klarheit zu erkennen ist.

§ 3.

Transformationsformeln.

Wir gehen jetzt dazu über, die allgemeinste Transformationsformel aufzufinden, welche die partielle Differentialgleichung (13) in die Lamésche Differentialgleichung

$$(22)\quad \frac{\partial^2 K}{\partial s_1 \partial t_1} = n(n+1)\,k^2\,\Big(sn^2(s_1+t_1)-sn^2(s_1-t_1)\Big)\,K$$

überführt. Zu diesem Zweck führen wir die Koordinatentransformation

$$s = ln\ tg\frac{\vartheta}{2} + i\varphi \tag{23}$$

$$t = ln\ tg\frac{\vartheta}{2} - i\varphi$$

ein, welche die Differentialgleichung (13) in die Normalform

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t} = -\frac{\lambda}{4\ ch^2\frac{s+t}{2}}\ K \tag{24}$$

verwandelt. In diesem Falle nimmt die Funktionalgleichung die Form

$$(2\ sh^2\frac{s+t}{2} - 1)(S - T) - 3\ sh\frac{s+t}{2}\ ch\frac{s+t}{2}(S' - T') + ch^2\frac{s+t}{2}(S'' - T'') = 0 \tag{25}$$

an. Differenziert man diese Gleichung zweimal nach s und t und addiert das Resultat zu (25), so ergibt sich die Gleichung

$$4(S - T) - 5(S'' - T'') + S'''' - T'''' = 0,$$

welche durch

$$S = \alpha_0 + \alpha_1 e^{2s} + \alpha_2 e^{-2s} + \alpha_3 e^{s} + \alpha_4 e^{-s},$$
$$T = \alpha_0 + \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{-2t} + \beta_3 e^{t} + \beta_4 e^{-t} \tag{26}$$

befriedigt wird. Aus der Funktionalgleichung (25) und deren Ableitung (beispielsweise für $s=t=\frac{i\pi}{2}$) folgt leicht, dass nicht alle Konstanten in (26) willkürlich wählbar sind. Wählt man die Konstanten $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ willkürlich, so sind die $\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$ durch die Beziehungen

$$\beta_1 = \alpha_2,\ \beta_2 = \alpha_1,\ \beta_3 = -\alpha_4,\ \beta_4 = -\alpha_3$$

bestimmt.

Die Formeln (7), deren Integrale im allgemeinen elliptisch sind, führen also zur Basis aller Funktionen, die die Gleichung (24) in die Normalform (5) überführen. Da in den Formeln (7), welche elliptische Funktionen ergeben, 5 Konstanten will-

kürlich wählbar sind, so folgt, dass es Transformationsformeln der Form (7) geben kann, welche die Differentialgleichung (24) in die Lamésche Differentialgleichung (22) verwandeln.

Wie man leicht feststellt, führt beispielsweise die Transformation

$$e^s = ik\,\mathrm{sn}^2 s_1\,,\ e^t = ik\,\mathrm{sn}^2 t_1\,,\ S = -4(1+k^2) - 4ike^s + 4ike^{-s}$$

die Differentialgleichung (24) in (22) über. Aus der Form der Differentialgleichung (24) und (22) entnimmt man, dass alle anderen Transformationen, welche (24) in (22) überführen, nur von der Form

$$e^s = \frac{a\,\mathrm{sn}^2 s_1 + b}{c\,\mathrm{sn}^2 s_1 + d}\,,\quad e^t = \frac{\alpha\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \beta}{\gamma\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \delta}$$

sein können. Führt man diese in die Gleichung (24) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung leicht, dass

$$(27)\quad e^s = -\frac{\delta k^2 \mathrm{sn}^2 s_1 + \gamma}{\beta k^2\,\mathrm{sn}^2 s_1 + \alpha},\quad e^t = \frac{\alpha\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \beta}{\gamma\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

sein muss, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürliche Konstanten sind.

Aus (23) und (27) folgt, dass wir in

$$(28)\quad \begin{aligned} \mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} &= -\frac{\delta k^2\,\mathrm{sn}^2 s_1 + \gamma}{\beta k^2\,\mathrm{sn}^2 s_1 + \alpha}, \\ \mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi} &= \frac{\alpha\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \beta}{\gamma\,\mathrm{sn}^2 t_1 + \delta} \end{aligned}$$

die allgemeinste Transformation besitzen, welche die Differentialgleichung (13) in die Lamésche Differentialgleichung (22) verwandelt.

Man erkennt sofort, dass die Umrechnung der Lösungen (16), (17), (18), (19) in die neuen Koordinaten sich recht einfach gestaltet, wenn man zunächst aus (28) die drei Aggregate

$$\cos\vartheta,\quad \sin\vartheta\cos\varphi,\quad \sin\vartheta\sin\varphi$$

in s_1, t_1 ausdrückt. Durch einfache Rechnung erhält man aus (28) die übersichtlichen Formeln

$$(28a)\quad \begin{aligned} \cos\vartheta &= 2d\,(a_1\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t + b_1\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t + c_1\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}\,t), \\ \sin\vartheta\cos\varphi &= d\,(a_2\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t + b_2\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}t + c_2\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}t), \\ \sin\vartheta\sin\varphi &= id\,(a_3\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t + b_3\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t + c_3\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}\,t), \end{aligned}$$

wobei

$s_1+t_1=s,\quad s_1-t_1=t,\quad \frac{1}{2\,k'^2\,(\alpha\delta-\beta\gamma)}=d,\quad k'^2(\beta\delta k^2-\gamma\alpha)=a,$

$-(\beta\gamma+\delta\alpha+\beta\delta)\,k^2-\gamma\alpha=b_1,\quad \beta\gamma+\delta\alpha+\gamma\alpha+\beta\delta\,k^2=c_1,$

$k'^2(\beta^2-\delta^2)k^2-\alpha^2+\gamma^2)=a_2,\quad -(2\alpha\beta-2\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)k^2-\alpha^2+\gamma^2=b_2,$

$(2\alpha\beta-2\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)\,k^2+\alpha^2-\gamma^2=c_2,\quad k'^2(\beta^2+\delta^2)k^2-\alpha^2-\gamma^2)=a_3,$

$-(2\alpha\beta+2\gamma\delta+\beta^2+\delta^2)k^2-\alpha^2-\gamma^2=b_3,\quad 2\alpha\beta+2\gamma\delta+\alpha^2+\gamma^2+$
$+(\beta^2+\delta^2)\,k^2=c_3$

gesetzt ist. Gerade in der Möglichkeit, solche übersichtliche und relativ einfache Transformationsformeln (28a) zu gewinnen, liegt ein Hauptvorteil der allgemeinen Formeln (28). Aus (28a) entnimmt man die für das Folgende wichtigen speziellen Transformationsformeln:

(29)
$$\cos\vartheta = k\ \mathrm{sn}\,s\ \mathrm{sn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \cos\varphi = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \sin\varphi = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,s\ \mathrm{dn}\,t;$$
$$\left(\alpha = ik\,(k-1),\ \beta = i\,(k-1),\ \gamma = -\,kk',\ \delta = k'\right)$$

(29a)
$$\cos\vartheta = k\ \mathrm{sn}\,s\ \mathrm{sn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \cos\varphi = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,s\ \mathrm{dn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \sin\varphi = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,s\ \mathrm{cn}\,t;$$
$$\left(\alpha = k\,(1-k),\ \beta = 1-k,\ \gamma = -\,kk',\ \delta = k\right)$$

(29b)
$$\cos\vartheta = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,s\ \mathrm{dn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \cos\varphi = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,s\ \mathrm{cn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \sin\varphi = k\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t;$$
$$\left(\alpha = -\,ik\,(1+k'),\ \beta = ik,\ \gamma = -\,k^2,\ \delta = 1+k'\right)$$

(29c)
$$\cos\vartheta = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\,\cos\varphi = k\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t,$$
$$\sin\vartheta\ \sin\varphi = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}\,t;$$
$$\left(\alpha = -\,k,\ \beta = i\,(k'-ik),\ \gamma = -\,ik\,(k'-ik),\ \delta = 1\right)$$

Es sei hierzu folgendes bemerkt: Die Formeln (29a), (29b), (29c) gehen aus (29) dadurch hervor, dass man je zwei der Aggregate $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ permutiert; beachtet man, dass diese Permutation genau der Permutation je zweier Koordinaten von (14) entspricht, was offenbar bei der Transformation in Polarkoordinaten der symmetrischen Differentialgleichung (15), die durch den Produktansatz in die Differentialgleichung (13) übergeht, belanglos ist, so kann man aus der Beziehung (29) alle anderen Formeln ohne Rechnung erhalten.

Weiter geben wir noch Transformationsformeln an, welche die bekannte Darbouxsche Differentialgleichung in die Differentialgleichungen der Laméschen Funktionen und der Laplaceschen Kugelfunktionen verwandeln. Diese Untersuchung scheint mir aus zwei Gründen von Interesse zu sein: erstens sieht man sofort, wie man fast ohne Rechnung zu bemerkenswerten speziellen Lösungen von (22) kommen kann, welche zu Integralgleichungen der Laméschen Funktionen führen; zweitens wird dadurch gezeigt, wie man die bekannten Lösungen der Differentialgleichung (13) für die Gewinnung von Integralgleichungen für die periodischen Lösungen der gewöhnlichen Darbouxschen Differentialgleichung nutzbar machen kann. Dass dieses Verfahren auf alle ineinander überführbare Differentialgleichungen anwendbar ist, braucht kaum erwähnt zu werden.

Die gewöhnliche Darbouxsche Differentialgleichung

$$u'' - \left(\frac{n(n+1)}{\sin^2 x} + \lambda\right) u = 0\,, \tag{30}$$

deren Lösungen bekannt sind[13], führt zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - n(n+1)\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y}\right) K = 0\,, \tag{31}$$

welche durch die Transformation

$$x = s + t,\quad y = s - t \tag{32}$$

in die Normalform

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s\,\partial t} = n(n+1)\left(\frac{1}{\sin^2(s+t)} - \frac{1}{\sin^2(s-t)}\right) K \tag{33}$$

[13] Vgl. Darboux, l. c.[8], S. 199.

übergeht. Genau wie oben kommt man leicht zu der Transformation

$$\sin s = \frac{1}{k \operatorname{sn} s_1}, \quad \sin t = \operatorname{sn} t_1, \tag{34}$$

welche die Differentialgleichung (33) in die Lamésche Differentialgleichung (22) verwandelt. Um nun zu speziellen Lösungen der Differentialgleichung (22) zu gelangen, hat man beispielsweise die Lösung

$$u = \sin^{n+1} x \, F(a, b, c, \sin^2 x) \tag{35}$$

der Differentialgleichung (30), wobei

$$a = \frac{n+1+\sqrt{-\lambda}}{2}, \quad b = \frac{n+1-\sqrt{-\lambda}}{2}, \quad c = n + \frac{3}{2}$$

ist, in die neuen Koordinaten auszudrücken. Damit hier *sinx, siny* eine übersichtliche und möglichst einfache Gestalt annehmen, empfiehlt es sich, genau wie oben von einer allgemeinen Transformationsformel auszugehen.

Aus der Tatsache, dass es Transformationsformeln gibt, welche die Differentialgleichungen (13) und (31) in die Lamésche Differentialgleichung (22) verwandeln, folgt, dass es Koordinatentransformationen geben muss, die die Differentialgleichung (24) in die Differentialgleichung (33) überführen. Solche allgemeine Transformationsformeln, die dies leisten, erhält man explizite, wenn man aus den Formeln (28) und (34) s_1 und t_1 eliminiert. Man kommt leicht zu den Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} = -\frac{\gamma \sin^2 s + \delta}{\alpha \sin^2 s + \beta},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi} = \frac{\alpha \sin^2 t + \beta}{\gamma \sin^2 t + \delta}. \tag{36}$$

Es empfiehlt sich auch hier zunächst die Aggregate $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta \cos\varphi$, $\sin\vartheta \sin\varphi$ zu berechnen. Man kommt durch einfache Rechnung beispielsweise für $\cos\vartheta$ zu dem Ausdruck

$$\cos\vartheta = \cot(s+t)\cot(s-t),$$

Durch die Transformationen (32) kommt man unmittelbar zu Lösungen der Differentialgleichung (31), welche direkt zu Integralgleichungen der Darbouxschen Differentialgleichung (30) führen. Somit kommt man zu dem Ergebnis, dass die Lösungen (16), (17), (18), (19) der Differentialgleichung (13) in einfacher Weise zu Integralgleichungen für die periodischen Lösungen der Darbouxschen Differentialgleichung (30) Anlass geben. Es sei noch ein einfaches Beispiel dieser Art explizite angegeben. Setzt man in (16) den entsprechenden Wert von $\cos\vartheta$ für $h = 0$ ein, so kommt man zu dem Kern

$$P_n(\cot x \cot y),$$

welcher der Differentialgleichung (31) genügt.

Wir bemerken hierzu noch folgendes: obgleich die Differentialgleichung (31) und deren Lösungen sich durch Grenzübergang aus der Laméschen Differentialgleichung und deren Lösungen gewinnen lassen, ist das hier entwickelte Verfahren auch in diesem Falle keineswegs überflüssig, da der direkte Grenzübergang in vielen Fällen zu nichts führt und erst nach gewissen Transformationen, die vielfach keineswegs auf der Hand liegen, ausgeführt werden kann.

Schliesslich erwähnen wir noch die bekannten Differentialgleichungen

$$(37) \qquad \begin{aligned} &u'' - \left(\frac{n(n+1)}{\sin^2 x} + \lambda\right) u = 0, \\ &v'' - \lambda v = 0; \end{aligned}$$

$$(38) \qquad \begin{aligned} &u'' - \left(\frac{n(n+1)}{x^2} + \lambda\right) u = 0, \\ &v'' - \lambda v = 0; \end{aligned}$$

$$(39) \qquad \begin{aligned} &u'' - \left(\frac{n(n+1)}{x^2} + \lambda\right) u = 0, \\ &v'' - \left(\frac{n(n+1)}{y^2} + \lambda\right) v = 0. \end{aligned}$$

Es ist zunächst bemerkenswert, dass alle diese Differentialgleichungen Lösungen besitzen, welche in geschlossener Form

angegeben werden können. Hinsichtlich der entsprechenden partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(37a)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{\sin^2 x} K = 0,$$

$$\text{(38a)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{x^2} K = 0,$$

$$\text{(39a)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - n(n+1)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) K = 0$$

erscheint mir noch die folgende Feststellung von Interesse: Diese partiellen Differentialgleichungen lassen sich in die Lamésche Differentialgleichung (22) und also ineinander überführen. Diese Tatsache ermöglicht nun zu erkennen, wie man zu den allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen gelangen kann.

§ 4.

Integralgleichungen für die Laméschen Polynome und Funktionen.

Das Ziel dieses Paragraphen ist, Integralgleichungen

$$\text{(40)} \qquad \varphi(s) = \mu \int_{-2K}^{2K} K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

der Laméschen Polynome und Funktionen explizite anzugeben und zu zeigen, dass die in der bisherigen Literatur bekannten wichtigen Beispiele dieser Integralgleichungen in den hier gewonnenen Resultaten als Spezialfälle enthalten sind. Anschliessend werden einige wichtige Eigenschaften der Integralgleichungen der Laméschen Polynome angegeben. Dabei kommt die Bedeutung der Resultate, die in den Paragraphen 2 und 3 enthalten sind, direkt zur Geltung.

Bei Einführung von elliptischen Funktionen durch (29) bzw. (29a) bzw. (29b) bzw. (29c) gehen die symmetrischen Kugelfunktionen

$$\cos h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta), \quad \sin h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta) \qquad (h = 0, 1, 2),$$

die offenbar Spezialfälle der allgemeinen Laplaceschen Kugel-

funktion n^{ter} Dimension (16) sind, direkt in die Funktionen

$$
\begin{aligned}
&P_n(k\,\mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t), \qquad P_n\left(\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\right), \qquad P_n\left(\frac{1}{k'}\mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\right),\\
&\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\,P_n'(k\mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t),\\
&\mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\,P_n'(k\,\mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t), \quad \mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t P_n'\left(\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\right),\\
(40a)\quad &\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\,P_n'\left(\frac{1}{k'}\mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\right), \quad \mathrm{sn}s\,\mathrm{cn}s\,\mathrm{sn}t\,\mathrm{cn}t\,P_n''\left(\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\right)\\
&\mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t\;P_n'\left(\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\right), \qquad \mathrm{dn}s\,\mathrm{dn}t\,P_n'\left(\frac{ik}{k'}\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\right),\\
&\mathrm{cn}s\,\mathrm{dn}s\,\mathrm{cn}t\,\mathrm{dn}tP_n''(k\mathrm{sn}s\,\mathrm{sn}t), \; \mathrm{sn}s\,\mathrm{dn}s\,\mathrm{sn}t\,\mathrm{dn}tP_n''\left(\frac{ik}{k'}\mathrm{cn}s\,\mathrm{cn}t\right),
\end{aligned}
$$

über, deren jede eine im Grundgebiete $2K \leqq s \leqq 2K$, $2K \leqq t \leqq 2K$ reguläre symmetrische periodische Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$
(41) \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - n\,(n+1)\,k^2\,(\mathrm{sn}^2\,s - \mathrm{sn}^2\,t)\,K = 0
$$

ist. Auf Grund des in der Einleitung erwähnten Zusammenhangs (I), (II) und (III) schliessen wir, dass jede Integralgleichung (40), wenn man für $K(s, t)$ eine dieser Funktionen setzt, periodische Lösungen der gewöhnlichen Laméschen Differentialgleichung

$$
(42) \qquad u'' - \left(n(n+1)\,\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{s} + \lambda\right)u = 0
$$

definiert. Das sind aber die zuerst von Whittaker für die Laméschen Polynome angegebenen Kerne.[14] Es sei hierzu bemerkt, dass Whittaker durch direkte Verifikation nachweist, dass die Funktionen (40a) der Differentialgleichung (41) genügen.

Die Lösung (18) geht durch die Variablentransformation (29) in

$$
(43) \qquad K(s,t) = \left(\frac{ak}{k'}\,i\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t + \frac{b}{k'}\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}\,t + ck\,\mathrm{sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t\right)^n
$$

über, woraus man den zuerst von Whittaker angegebenen Kern[15].

---

[14] Whittaker-Watson, l. c.[1].

[15] Humbert, l. c.[2]. S. 15.

(43a) $K(s,t) = (\mathrm{dn}\,s\ \mathrm{dn}\,t + k\ \mathrm{cn}\,s\ \mathrm{cn}\,t)^n$
unmittelbar entnimmt.

Auch die Transformation des allgemeinen Falles (16) ist trivial, wenn man beachtet, dass der Ausdruck sich leicht in eine Funktion der drei Argumente $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ umformen lässt.

Bevor wir zu den Integralgleichungen der Laméschen Funktionen übergehen, wollen wir aus den vorhandenen Resultaten einige wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst bemerken wir, dass aus der Eigenschaft der Kugelfunktionen sich als ganze rationale Funktionen der drei Argumente $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ darstellen zu lassen folgt, dass durch die Transformation (28a) der Ausdruck (16) in eine ganze rationale Funktion der drei Argumente $\mathrm{sn}\,t$ $\mathrm{sn}\,t$, $\mathrm{cn}\,s$ $\mathrm{cn}\,t$, $\mathrm{dn}\,s$ $\mathrm{dn}\,t$ übergeht. Offenbar sind in diesem Falle die Eigenfunktionen der Integralgleichung (40) ganze rationale Funktionen in $\mathrm{sn}\,s$, $\mathrm{cn}\,s$, $\mathrm{dn}\,s$.

Wir haben gesehen, wie die partielle Lamésche Differentialgleichung (41) durch Koordinatentransformationen aus der Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen (13) hervorgeht. Somit lassen sich die bekannten Sätze über die Lösungen der einen unmittelbar auf die Lösungen der anderen übertragen.

Aus der Tatsache, dass es ausser der Lösung (16) keine weiteren Lösungen von (13) gibt, welche überall auf der Kugel regulär sind, folgt, dass wir in der transformierten Kugelfunktion (16) alle Lösungen der Laméschen Differentialgleichung (41), welche symmetrische Polynome in $\mathrm{sn}\,s$ $\mathrm{sn}\,t$, $\mathrm{cn}\,s$ $\mathrm{cn}\,t$, $\mathrm{dn}\,s$ $\mathrm{dn}\,t$ sind und zugleich alle Integralgleichungen dieser Art besitzen. Hat man also einen Kern, der ein symmetrisches Polynom in $\mathrm{sn}\,s$ $\mathrm{sn}\,t$, $\mathrm{cn}\,s$ $\mathrm{cn}\,t$, $\mathrm{dn}\,s$ $\mathrm{dn}\,t$ ist, so ist er ein Spezialfall von (16).

Weiter betrachten wir die $2n+1$ linear unabhängigen symmetrischen Kugelfunktionen $\cosh\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$, $\sinh\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$ $(h=0, 1, 2, \ldots, n)$, deren jede zu einer Integralgleichung (40) der Laméschen Polynome Anlass gibt. In diesem Falle lässt sich der Kern der Integralgleichung (40) in der Form

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(s)\alpha_i(t)$$

ausdrücken, wobei die $\alpha_i(s)$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$ linear unabhängig sind und $m=\sigma+1$, $n-\sigma$, σ zu setzen ist ($\sigma=\frac{1}{2}n$ bei geradem n, $\sigma=\frac{1}{2}(n-1)$ bei ungeradem n). Aus der Tatsache, dass im Falle der Laméschen Polynome die Differentialgleichung (42) keine mehrfachen Eigenwerte λ besitzt, und aus dem Zusammenhange des Eigenwertproblems (I) mit der homogenen Integralgleichung (II) [16] schliessen wir, dass jeder der $2n+1$ linear unabhängigen Kerne m voneinander verschiedene Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt. Da es bekanntlich für ein bestimmtes n nur $2n+1$ linear unabhängige Lamésche Polynome gibt, so folgt, dass linear unabhängige Kerne existieren, welche gleiche Eigenfunktionen besitzen.

Wie sich die $2n+1$ Kerne auf die 4 Klassen Laméscher Polynome verteilen, kann man leicht aus der algebraischen Form der Kerne und der Laméschen Polynome entnehmen. So kommt man zu der Erkenntnis, dass es $\sigma+1$ linear unabhängige symmetrische Kerne $K_1(s,t)$ bzw. $n-\sigma$ Kerne $K_2(s,t)$ bzw. $n-\sigma$ Kerne $K_3(s,t)$ bzw. σ Kerne $K_4(s,t)$ gibt, deren jeder dieselben $\sigma+1$ bzw. $n-\sigma$ bzw. $n-\sigma$ bzw. σ Eigenfunktionen besitzt, welche mit den entsprechenden Klassen Laméscher Polynome identisch sind [17].

Noch eine beachtenswerte Bemerkung zu dem Kern (43). Unter der Voraussetzung, dass keine der Konstanten a, b, c,

---

[16] Ince, l. c. [3].

[17] Vgl. hierzu die Arbeit des Verfassers, Beitrag zur Theorie der Laméschen Funktionen, Mém. de la Fac. Sciences de l'Université de Vytautas le Grand, Bd. 11. Heft. 1, Kaunas (1937). Daselbst sind für die Laméschen Polynome Integralgleichungen der Form

$$\varphi(s)=\mu\int_{0}^{K}K(s,t)\varphi(t)dt \quad \text{bzw.} \quad \varphi(s)=\mu\int_{-K}^{K}K(s,t)\varphi(t)dt$$

angegeben, wobei 4K die reelle Periode der elliptischen Funktionen Jacobis ist.

Null wird (dabei ist zu beachten, dass stets $a^2+b^2+^2=0$ sein muss), lässt sich der Kern (43) in der Form

$$K(s,t) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i(s)\alpha_i(t)$$

schreiben, wobei die $\alpha_i(s)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ linear unabhängig sind. Genau wie oben kommen wir zu dem Resultat: Die $2n+1$ Laméschen Polynome n^{ten} Grades können durch *eine* Integralgleichung definiert werden.

Wir gehen nunmehr zu der Frage nach den Integralgleichungen der Laméschen Funktionen über. Obgleich wir gegenwärtig noch nicht imstande sind, diese Frage vollständig zu beantworten, können wir jedoch ohne weiteres ein Teilproblem lösen, welches unter Umständen das für die Praxis allein interessierende sein mag. Wir können nämlich eine unbeschränkte Anzahl Integralgleichungen (40) explizite angeben, deren Eigenfunktionen periodische Lösungen der Laméschen Differentialgleichung (42) sind.

Die Integralgleichungen gewinnen wir in genauer Analogie zu dem Verfahren, welches uns zu den Integralgleichungen der Laméschen Polynome führte. Man hat hier jedoch zu beachten, dass, falls die Kerne nicht in geschlossener Form darstellbar sind, die Potenzreihen im Grundgebiete gleichmässig konvergieren müssen. Daher sind in diesem Falle nicht alle Koordinatentransformationen zulässig. Geht man beispielsweise von der Lösung (17) aus, die für $|\cos\vartheta|<1$ konvergiert, so sieht man, dass die Transformationen (29b) und (29c) im allgemeinen nicht zum Ziele führen können. Obwohl man im allgemeinen zu komplizierteren Resultaten kommt, ist im Falle (17) jedoch die Koordinatentransformation trivial. Wir geben hier explizite den Fall $h=0$ an:

$$K(s,t) = u_{n,o}(k \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t),$$

wobei $u_{n,o}(x)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der Legendreschen Polynome ist. Es sei hier ausdrücklich hervorgehoben, dass wir auch im Falle der Laméschen Polynome, d. h. für $h=0, 1, 2, \ldots, n$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ aus (17) Kerne er-

halten, deren Eigenfunktionen allgemeinere periodische Lösungen der Laméschen Differentialgleichung (42) sind.

Zu einem bemerkenswerten Kern in geschlossener Form kommt man, wenn man die Lösung (19) in die elliptischen Koordinaten umrechnet. Es ergibt sich der Kern

$$(44a)\quad K(s,t)=\left(\frac{aki}{k'}\,\mathrm{cn}\,s\,\mathrm{cn}\,t+\frac{b}{k}\,\mathrm{dn}\,s\,\mathrm{dn}\,t+\mathrm{c\,k\,sn}\,s\,\mathrm{sn}\,t\right)^{-n-1},$$

welcher den Bemerkungen über die Lösungen (16) und (18) gemäss die Vermutung veranlasst, dass er ein Spezialfall von (14) ist. Es sei bemerkt, dass man der Form nach einfache Kerne erhält, wenn man den Kern (44a) nach einer der Konstanten a, b, c differenziert (man beachte dabei, dass $a^2+b^2+c^2=0$ ist).

Zu weiteren Kernen der Laméschen Funktionen in geschlossener Form kommt man, wenn man von den partiellen Differentialgleichungen (37a), (38a), (39a) ausgeht. Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass sich beispielsweise die allgemeine Lösung der ersten Differentialgleichung (38) in der Form

$$u=c_1 e^{\sqrt{\lambda x}}x^{-n}u_1+c_2 e^{-\sqrt{\lambda x}}x^{-n}u_2$$

schreiben lässt, wobei u_1 (x) und u_2 (x) Polynome n$^{\text{ten}}$ Grades sind.

§ 5.

Bemerkungen über die Integralgleichungen der Laméschen Polynome und Funktionen, wenn den Untersuchungen die Weierstrasssche $\wp$ Funktion zugrunde gelegt ist.

Durch die Variablentransformation

$$\cos\vartheta=\frac{\sqrt{\wp(s)-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},$$

$$(45)\qquad \sin\vartheta\cos\varphi=\frac{\sqrt{\wp(s)-e_2}}{\sqrt{e_1-e_2}}\,\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{\wp e_3-e_2}},$$

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \frac{\sqrt{\wp(s) - e_1}\ \sqrt{\wp(t) - e_1}}{\sqrt{e_2 - e_1}\ \sqrt{e_3 - e_1}}$$

geht die partielle Differentialgleichung der Laplaceschen Kugelfunktionen (13) in

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - n(n+1)\Big(\wp(s) - \wp(t)\Big) K = 0 \tag{46}$$

über, welche auch aus der Laméschen Differentialgleichung (22) durch die Transformation $s_2 = s_1 + t_1$, $t_2 = s_1 - t_1$ und $s_2 = s + iK'$, $t_2 = t + iK$, $\operatorname{sns} = \frac{1}{\sqrt{\wp(s) - e_3}}$ gewonnen werden kann.

Man kommt zu Lösungen der partiellen Differentialgleichung (46), wenn man die bekannten Lösungen der Differentialgleichung (13) durch die Beziehungen (45) in die neuen Koordinaten umrechnet. Man sieht unmittelbar ein, dass beispielsweise die Lösungen (16) und (18) in ganze rationale Funktionen der drei Argumente

$$\sqrt{\wp(s) - e_3}\ \sqrt{\wp(t) - e_3},\ \sqrt{\wp(s) - e_2}\ \sqrt{\wp(t) - e_2},\ \sqrt{\wp(s) - e_1}\ \sqrt{\wp(t) - e_1}$$

übergehen.

Anstatt der Integralgleichung (40) tritt hier die Integralgleichung.

$$\varphi(s) = \mu \int_{\alpha}^{\alpha + 2\omega_1} K(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{47}$$

auf, worin $2\omega_1$ die reelle Periode von $\wp(s)$ ist und α eine willkürliche Konstante bedeutet, die jedoch so zu wählen ist, dass das Integral (47) einen Sinn hat.

Durch den Produktansatz $K = u(s)v(s)$ wird die partielle Differentialgleichung (46) in zwei identische gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$u'' - \Big(n(n+1)\wp(s) + \lambda\Big) u = 0$$

zerspalten, welche in genauer Analogie zu (42) steht.

Beachtet man noch das bei der Integralgleichung (47) angegebene Grundgebiet, so lassen sich die Resultate der Paragraphen 3 und 4 auch auf diesen Fall wörtlich übertragen.

Es sei bemerkt, dass sich die Formeln in diesem Falle leicht rationalisieren lassen, wenn man die bekannte Formel

$$\sqrt{\wp(s)-e_i}=\frac{\left(\wp\left(\frac{s}{2}\right)-e_i\right)^2-(e_i-e_\tau)(e_i-e_\mu)}{\wp'\left(\frac{s}{2}\right)} \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} i\neq\tau, \\ i\neq\mu; \end{pmatrix} \qquad i,\tau,\mu=1,2,3$$

heranzieht.

Ausgehend von der Lösung (18) können wir nunmehr leicht zeigen, dass die von Scharma angegebene Integralgleichung[18] für die Laméschen Polynome einen Spezialfall der hier erhaltenen Resultate darstellt. Durch die Transformation (45) geht nämlich die Lösung (18) in

$$K(s,t)=\left(a\frac{\sqrt{\wp(s)-e_1}\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_3-e_1}}+b\frac{\sqrt{\wp(s)-e_2}\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_3-e_2}}+\right. \tag{49}$$

$$\left.+c\frac{\sqrt{\wp(s)-e_3}\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}}\right)^n$$

über, wobei $a^2+b^2+c^2=0$ ist. Der Ausdruck (49) lässt sich durch die Formel (48) leicht rationalisieren. Sucht man die Konstanten a, b und c so zu bestimmen, dass (49) in die Form

$$K(s,t)=\left[\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{-n}\left[d+f\left(\wp\left(\frac{s}{2}\right)-e_i\right)\left(\wp\left(\frac{t}{2}\right)-e_i\right)\right]^{2n}$$

übergeht, wobei die Konstanten d und f reell sein sollen, so ergibt sich nach einfacher Rechnung, dass beispielsweise für $i=2$ die Konstanten

$$a=\sqrt{e_2-e_3},\quad b=\sqrt{e_3-e_1},\quad c=\sqrt{e_1-e_2},\quad d=1,$$

$$f=-\frac{1}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}$$

---

[18] Scharma, l. c.[5].

sein müssen. Man kommt also zu dem Kern

$$(50)\quad K(s,t)=\left[\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{-n}\left[1-\frac{\left(\wp\left(\frac{s}{2}\right)-e_2\right)\left(\wp\left(\frac{t}{2}\right)-e_2\right)}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}\right]^{2n},$$

der mit dem von Scharma angegebenen vollständig übereinstimmt.

Noch eine weitere Bemerkung zu den Kernen der Form (50). Zunächst heben wir hervor, dass die Kerne

$$K_i\,(s,t)\qquad (i=1,\,2,\,3,\ldots,\,m)$$

einen Kern der Form

$$(51)\qquad K\,(s,t)=\sum_{i=1}^{m} c_i\,K_i\,(s,t)$$

veranlassen, woraus sich bei spezieller Wahl der Konstanten c_i (i=1, 2, 3, . . ., m) weitere verschiedene Formen eines Kernes ergeben. Hat man jedoch einen Kern der bestimmten Form gefunden, so kommt man leicht zu einem andern Kern der analogen Form, wenn man die zweite Lösung der gewönhlichen Differentialgleichung auffindet. Diese letzte wird durch die Form der bekannten Lösung vollständig bestimmt.

Sucht man beispielsweise einen zweiten Kern der Form (50), so ergibt sich aus der partiellen Differentialgleichung (46) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(52)\quad 2z(1-z)\,P''(z)-(2n-1)(1-3z)\,P'(z)-2n(2n-1)\,P(z)=0,$$

wenn man

$$(53)\quad K(s,t)=\left[\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{-n}P(z)\quad\text{mit}\quad z=\frac{\left(\wp\left(\frac{s}{2}\right)-e_2\right)\left(\wp\left(\frac{t}{2}\right)-e_2\right)}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}$$

setzt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (52) lässt sich in der Form

$$(54)\quad P(z)=c_1(1-z)^{2n}+c_2z^{n+\frac{1}{2}}\;F\left(-n+\frac{1}{2},\,1,\,n+\frac{3}{2};\,z\right)$$

schreiben. Man sieht unmittelbar ein, dass die Lösung (53), wenn man in (54) c_2=0 setzt, mit dem Kern (50) identisch ist.

Setzt man in (54) $c_1=0$, so kommt man zu dem Kern

$$(54a)\quad K(s,t)=\left(\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-n} z^{n+\frac{1}{2}}\,F\left(-n+\frac{1}{2},\,1,\,n+\frac{3}{2};\,z\right)$$

Zu einer der Form nach verschiedenen Lösung, die offenbar in der allgemeinen Lösung (54) enthalten ist, kommt man, wenn man die unabhängige Variable t durch $t=\frac{1}{z}$ in (52) einführt. Man kommt auf diese Weise zu der Lösung

$$(55)\quad P(z)=c_3(1-z)^{2n}+c_n\,z^{n-\frac{1}{2}}\,F\left(-n+\frac{1}{2},\,1,\,n+\frac{3}{2};\,\frac{1}{z}\right).$$

Setzt man hier $c_3=0$, so erhält man den Kern

$$(56)\quad K(s,t)=\left[\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{-n} z^{n-\frac{1}{2}}\,F\left(-n+\frac{1}{2},\,1,\,n+\frac{3}{2};\,\frac{1}{z}\right).$$

Die Kerne (54a) und (56) sind mit den von Scharma angegebenen identisch[19]. Der Nachweis, dass die vermuteten Funktionen (54a) und (56) Lösungen der partiellen Differentialgleichung (46) sind und somit zu Integralgleichungen der Lamé-schen Funktionen Anlass geben, bildet den Inhalt dieser Arbeit.

Es ist bemerkenswert, dass die Lösung (19) in diesem Falle unmittelbar zu dem Kern in der geschlossenen Form

$$K(s,t)=\left[\wp'\left(\frac{s}{2}\right)\wp'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{n+1}\left[1-\frac{\left(\wp\left(\frac{s}{2}\right)-e_2\right)\left(\wp\left(\frac{t}{2}\right)-e_2\right)}{(e_1-e_2)\,(e_3-e_2)}\right]^{-2n-2}$$

führt, welcher offenbar auch eine zweite analoge Form zu (50) darstellt.

§ 6.

Integralgleichungen für die Mathieuschen Funktionen.

Ersetzt man in (41) s und t durch s+K, t+K und geht zu dem Limes $k\to 0$ über, wobei $n(n+1)\,k^2=\alpha^2$ (α eine Konstante)

---

[19] Scharma, On integral equation satisfied by Lamé's functions whose order is half of an odd integer, Journal de Math. p. et appl., Bd. 16, fasc. IV (1937), S. 355.

sein soll, so kommt man zu der partiellen Differentialgleichung der Mathieuschen Funktionen

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - a^2 (\cos^2 s - \cos^2 t) K = 0. \tag{57}$$

Versucht man nun aus den Lösungen (40a) der Laméschen Differentialgleichung (41) durch diesen Grenzübergang Lösungen der Differentialgleichung (57) zu gewinnen, so kommt man offenbar nicht zum Ziele; denn dieser Grenzübergang führt hier zu nichts. Auch aus dem allgemeinen Falle (16) lassen sich durch direkten Grenzübergang keine Lösungen von (57) entnehmen. Geht man dagegen von der Lösung (43) aus, welche ein Spezialfall von (16) darstellt, so erhält man die Lösung

$$K(s,t) = e^{\alpha(\sqrt{1+c^2}\sin s \sin t + \cos s \cos t)}, \tag{58}$$

wobei c eine willkürliche Konstante ist. Setzt man $c=i$ bzw. $c=0$ und beachtet, dass $\sqrt{1+c^2}$ zweideutig ist, so kommt man durch Addition bzw. Subraktion zu den Speziellen Lösungen

$$\cos(\alpha \cos s \cos t),\ \sin(\alpha \cos s \cos t),\ \mathrm{ch}(\alpha \sin s \sin t),\ \mathrm{sh}(\alpha \sin s \sin t) \tag{59}$$

der Mathieuschen Differentialgleichung. Die Kerne (53) sind zuerst von Whittaker angegeben worden[20].

Setzt man in (43) $b=1$ und $a=-i\sqrt{1+c^2}$, was offenbar keine Einschränkung für die Schar der Lösungen bedeutet, und differenziert nach c, so kommt man zu der Lösung

$$K(s,t) = nk\left(\sin s \sin t + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \sin s \sin t\right)\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{k'} k\ \mathrm{cn}\, s\, \mathrm{cn}\, t + \frac{1}{k'} \mathrm{dn}\, s\, \mathrm{dn}\, t + c\, k \sin s \sin t\right)^{n-1},$$

welche der Differentialgleichung (41) genügt. Durch den oben angegebenen Grenzübergang gewinnt man die Lösung von (57)

$$K(s,t) = \alpha\left(\cos s \cos t + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \sin s \sin t\right) e^{\alpha(\sqrt{1+c^2}\sin s \sin t + \cos s \cos t)}.$$

---

[20] Whittaker — Watson, l. c.[1] 19.22.

Hieraus entnimmt man unmittelbar die speziellen Lösungen für c=0

(60) $\cos s \cos t\, ch(\alpha \sin s \sin t)$, $\cos s \cos t\, sh(\alpha \sin s \sin t)$.

Multipliziert man K(s, t) mit der Konstante $\sqrt{1+c^2}$ und setzt dann c=i, so kommt man genau wie oben zu den speziellen Lösungen

(61) $\sin s \sin t \cos(\alpha \cos s \cos t)$, $\sin s \sin t \sin(\alpha \cos s \cos t)$.

Diese [(60) und (61)] sind zuerst von Poole[21] angegeben worden.

Es erscheint mir nicht überflüssig, zu zeigen, wie man fast mühelos direkt zu diesen Resultaten kommt, wenn man das Verfahren auf den Mathieuschen Fall anwendet. Der Kürze halber beschränken wir uns auf diesen einzelnen Fall.

Bekanntlich kommt man zur Mathieuschen Differentialgleichung (57), wenn man die Variablen

(62)
$$x = \cos s \cos t,$$
$$y = i \sin s \sin t$$

in die Wellengleichung

(63)
$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \alpha^2 K = 0$$

einführt. Durch den Produktansatz

(64)
$$K = u(x)\, v(y)$$

wird die Differentialgleichung (63) in die trivialen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u'' + (\alpha^2 - c)u = 0,$$
$$v'' + c\, v = 0$$

zerspalten. Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen lassen sich bekanntlich in der Form

---

[21] Poole, On certaine classes of Mathieu functions, Proc. London Math. Soc., Bd. 20 (1921), S. 358.

$$u = c_1 e^{\sqrt{c-\alpha^2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{c-\alpha^2}\,x}, \quad (c \neq \alpha^2)$$

$$u = c_1 x + c_2 ; \qquad (c = \alpha^2)$$

$$v = c_3 e^{\sqrt{-c}\,y} + c_4 e^{-\sqrt{-c}\,y}, \qquad (c \neq 0)$$

$$v = c_3 y + c_4 \qquad (c = 0)$$

schreiben, wobei c_i (i=1, 2, 3, 4) willkürliche Konstanten sind.

Aus (64) erhält man durch die Koordinatentransformation (62) unmittelbar die Lösungen

$$K(s,t) = u(s,t)\, v(s,t), \tag{66}$$

wobei für

$$u(s,t) = c_1 e^{\sqrt{c-\alpha^2}\cos s \cos t} + c_2 e^{-\sqrt{c-\alpha^2}\cos s \cos t}, \quad (c \neq \alpha^2)$$

$$u(s,t) = c_1 \cos s \cos t + c_2 ; \qquad (c = \alpha^2)$$

$$v(s,t) = c_3 e^{\sqrt{-c}\, i \sin s \sin t} + c_4 e^{-\sqrt{-c}\, i \sin s \sin t}, \quad (c \neq 0)$$

$$v(s,t) = c_3 \sin s \sin t + c_4 \qquad (c = 0)$$

zu setzen ist. Die Spezialfälle von (66) für $c=0$ bzw. $c=\alpha^2$ sind:

$$K(s,t) = \Big(c_1 \cos(\alpha \cos s \cos t) + c_2 \sin(\alpha \cos s \cot s)\Big)\Big(c_3 \sin s \sin t + c_4\Big),$$

$$K(s,t) = \Big(c_1 \cos s \cos t + c_2\Big)\Big(c_3\, ch(\alpha \sin s \sin t) + c_4\, sh(\alpha \sin s \sin t)\Big). \tag{67}$$

Als weitere Spezialfälle von (57) entnimmt man unmittelbar die Lösungen (59), (60) und (61).

Alle Lösungen (66) geben zu Integralgleichungen

$$\varphi(s) = \mu \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{68}$$

Anlass. Bekanntlich gibt es 4 Klassen Mathieuscher Funktionen:

$$Ce_{2k},\ Ce_{2k+1},\ Se_{2k},\ Se_{2k+1}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es auch hier genau wie im Laméschen Falle mehrere Kerne gibt, deren Eigenfunktionen mit den Mathieuschen Funktionen der einen Klasse identisch sind. Z. B. definieren die speziellen Kerne (59), (60) und (61) folgende Funktionen:

$\cos(\alpha \cos s \cos t)$, $ch(\alpha \sin s \sin t) \to Ce_{2k}$; $\sin(\alpha \cos s \cos t)$, $\cos s \cos t\, ch(\alpha \sin s \sin t) \to Ce_{2k+1}$; $sh(\alpha \sin s \sin t)$, $\sin s \sin t \cos(\alpha \cos s \cos t) \to Se_{2k+1}$; $\sin s \sin t \sin(\alpha \cos s \cos t)$, $\cos s \cos t\, sh(\alpha \sin s \sin t) \to Se_{2k}$.

Die Nichtbeachtung dieser Tatsachen hat bereits zu Fehlschlüssen geführt[22].

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass es im Mathieuschen Falle Integralgleichungen gibt, deren Kerne durch die Besselschen Funktionen ausdrückbar sind. Diese Tatsache bestätigt man unmittelbar, wenn man in die Differentialgleichung (63) Polarkoordinaten

(69) $$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi$$

einführt. Dabei geht die Differentialgleichung (63) in

(70) $$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial K}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 K = 0$$

über. Wendet man hier den Produktansatz

$$K = u(r)\, v(\varphi)$$

an, so kommt man für $u(r)$ zur Besselschen Differentialgleichung

$$r^2 u'' + r u' + (\alpha^2 r^2 - c)\, u = 0,$$

deren allgemeine Lösung

---

[22] Die Beispiele 1 und 2 bei Whittaker—Watson, l. c.[1] 19.22 entsprechen nicht den Tatsachen. Vgl. hierzu die russische Übersetzung von „Modern Analysis", Leningrad—Moskva (1934).

$$u = c_1 J_{\sqrt{c}}(\alpha r) + c_2 J_{-\sqrt{c}}(\alpha r) \tag{71}$$

lautet. Für v(φ) ergibt sich die triviale Differentialgleichung

$$v'' + cv = 0 ,$$

deren allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} v &= c_3 e^{\sqrt{-c}\varphi} + c_4 e^{-\sqrt{-c}\varphi} , \quad (c \neq 0) \\ v &= c_3 \varphi + c_4 \qquad\qquad (c = 0) \end{aligned} \tag{72}$$

ist. Dabei sind c und c_i (i=1, 2, 3, 4) willkürliche Konstanten. Setzt man in (71) und (72) die Werte

$$r = \sqrt{\cos^2 s - \sin^2 t} , \quad \varphi = arctg(i\, tgs\, tgt)$$

ein, so ergibt der Produktansatz

$$K(s,t) = u(s,t)\, v(s,t) \tag{73}$$

eine Schar von Lösungen der Differentialgleichung (57). Man hat aber dabei zu beachten, dass nur diejenigen Lösungen (73) zu Integralgleichungen (68) der Mathieuschen Funktionen Anlass geben, welche im Grundgebiete $-\pi \leqq s \leqq \pi$, $-\pi \leqq t \leqq \pi$ regulär sind.

Schliesslich sei bemerkt, dass das Verfahren genau wie im Laméschen Falle zur unbegrenzten Anzahl von Integralgleichungen für die Mathieuschen Funktionen führt, wobei sich jedoch die Rechnungstechnik wesentlich vereinfacht.

Mathematisches Seminar der Universität V. d. G.

in Kaunas (Litauen).

Januar 1939.

Įvadas ir pagrindiniai darbo rezultatai.

Lamé ir kitos joms giminingos funkcijos, atsiradusios matematinėj literatūroj prieš 100 metų[23], turi, palyginti, gausią literatūrą[24]. Patys pirmieji matematikai, padėję šių funkcijų tyrimui pagrindus, buvo Liouville ir Heine. Kiek vėliau šias funkcijas tyrinėjo ir šie garsūs matematikai: Ch. Hermite, F. Klein, F. Lindemann, Poincaré, Liapounov. Naujausiais laikais, dvidešimtojo amžiaus pradžioje, šių funkcijų tyrinėjimui naujus pagrindus davė žymus anglų matematikas Whittaker, surišdamas šių funkcijų diferencialinių lygčių periodinius sprendinius su integralinėmis lygtimis. Vadindamas Whittaker'į moderniosios Mathieu funkcijų teorijos tėvu, šių funkcijų specialistas prancūzas Humbert štai kaip vertina šį atradimą: „Heine et, après lui, un très grand nombre d'auteurs allemands, ont scherché quelles pouvaient être les propriétés des solutions de cette équations, qu'ils appelaient équations du cylindre elliptique; mais ils n'ont pas obtenu de résultats bien interessant; nous ne les mentionnerons que pour mémoire. Ce n'est que beaucoup plus tarp que M. E. T. Whittaker trouva l'équation intégrale à laquelle satisfont toutes les solutions périodiques de cette équation differentielle, découverte fondamentale, qui a suscité de mombreux travaux de l'école britanique contemporaine, et qui a rejeté dans l'ombre presque tout ce qui avait été fait auparavant, si ce n'est les belles recherches de Lindemann sur la solution générale de l'équation". Ir savo veikalo pabaigoje Humbert štai ką pareiškia: „C'est probablement dans le domaine des équations integrales que l'on pourra obtenir les plus fructueux ré-

---

[23] Plg. Lamé, Mémoire sur les surfaces isothermes, Journ. Liouville, 2 t. (1837).

[24] Šios plačios literatūros sąrašus galima rasti šiuose trijuose pagrindiniuose šių funkcijų veikaluose: a) Whittaker—Watson, Modern Analysis, Cambridge (1935); b) Humbert, Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu, Fasc. X du Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris (1926); c) Strutt, Lamésche—Mathieusche- und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Berlin (1932).

sultat. Ainsi, nous l'avons vu, l'équation intégrale des fonctions de Mathieu a jeté un jour nouveau sur leur théorie: il serait interessant de refaire l'étude des fonctions de Lamé à partir de leur équation intégrale: peut-être arriverait-on ainsi à des propriétés nouvelles". (Plg. l. c. [24], b) 27 p. ir 46 p.).

Šiandien šias funkcijas tyrinėti matematikus dar skatina fizikos ir technikos problemos, kurias sprendžiant šių funkcijų diferencialinės lygtys turi pagrindinės reikšmės. (Plg. l. c. [24] c).

Ryšį tarp diferencialinės lygties

$$(I) \quad L_s + \lambda\, w \equiv \frac{d}{ds}\left(p\,(s)\,\frac{dw}{ds}\right) + \left(q\,(s) + \lambda\right) w = 0$$

su periodiniais koeficientais, t. y. p(a)=p(b), q(a)=q(b), sprendinių, patenkinančių intervale $a \leqq s \leqq b$ ribines sąlygas $w(a)=w(b)$, $w'(a)=w'(b)$, ir integralinės lygties

$$(II) \qquad w\,(s) = \mu \int_a^b K\,(s,t)\; w\,(t)\; dt$$

nustato sekantis dėsnis[25]:

Kiekvienas dalinės diferencialinės lygties

$$(III) \quad L_s\,(K) - L_t\,(K) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(p\,(s)\,\frac{\partial K}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(p\,(t)\,\frac{\partial K}{\partial t}\right) + \left(q(s) - q(t)\right)K = 0 \quad \left(K = K(s,t)\right)$$

simetriškas periodiškas sprendinys, kuris yra srityje $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ reguliarus, t. y. turi pirmą ir antrą šioje srityje tolydines išvestines, nustato (II) integralinės lygties branduolį, kurio ypatingosios funkcijos patenkina (I) diferencialinę lygtį ir (I) diferencialinės lygties sprendiniams nustatytas ribines sąlygas.

Iš čia išeina, kad branduoliai K(s, t), patenkindami tolydinumo sąlygą, esminiai skiriasi nuo integralinių lygčių branduolių, nustatytų Green'o funkcijų, kurių pagrindinė savybė yra kaip tik virsti netolydinėmis, kai s=t. Ir dėsnis, kuris nustato

---

[25] Ince, l. c.[3].

ryšį tarp (I) ir (II) lygčių čia nėra apverčiamas: apskritai (II) lygties sprendiniai sudaro tik dalį visų (I) lygties periodinių sprendinių. Tad čia apie (I) ir (II) problemų pilną ekvivalentingumą, kuris visada pasireiškia tuo atveju, kai (II) lygties branduolį nustato Green'o funkcijos, negali būti ir kalbos.

Norint gauti (II) tipo integralines lygtis, kurios, anot Humberto, teikia šių funkcijų teorijai naujos šviesos, reikia išreikšta forma turėti (III) dalinės diferencialinės lygties simetriškų periodinių sprendinių, kurie srityje $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ yra reguliarūs. Kad dalinės diferencialinės lygties simetriškiems periodiniams sprendiniams surasti kur nors literatūroje būtų buvęs pavartotas sisteminis metodas, niekur nesame pastebėję. Vieną branduolį Mathieu funkcijų integralinei lygčiai Whittakeris gauna iš bendresniojo Laplece'o lygties sprendinio, įvesdamas naujas koordinatas ir panaudodamas žinomąją sprendinio formą[26]. Bet kaip Whittaker'is ir kiti autoriai yra suradę kitus Mathieu ir Lamé funkcijų integralinių lygčių branduolius, nėra jokių nurodymų[27]. Atrodo, kad apskritai integralinės lygtys būdavo gaunamos tokiu būdu: intuityviai nujausta (III) dalinės diferencialinės lygties sprendinio forma tiesiog įstatoma į šią diferencialinę lygtį, ir tokiu būdu gaunama speciali sprendinio išraiška. Toks sprendinių radimo būdas visų pirma reikalauja išvystytos intuityvios skaičiavimo technikos ir daug skaičiavimo. Kita vertus, yra pagrindo abejoti, ar komplikuotesniais atvejais tokiu keliu apskritai galima prieiti teigiamų rezultatų. Čia reikia pastebėti, kad atskirų integralinių lygčių atsiradimo raida aiškiai rodo, kiek maža čia gali padėti vadinamieji bendresnieji ar net bendrieji dalinių diferencialinių lygčių sprendiniai[28]. Ir atskiri bandymai šį klausimą spręsti specialios formos sprendiniais, panaudojant ir koordinatų transformaciją, nedavė praktiškų rezultatų[29]. Todėl ir tarp (II) integralinių lygčių branduolių, atrastų atskirų mokslininkų (daugiau pripuolamai) toms pačioms funkcijoms, iki šiol nebuvo aiškaus ryšio.

---

[26] Whittaker - Watson l. c.[1] 19.21.

[27] Plg. Scharma, l. c.[5].

[28] l. c.[6].

[29] l. c.[7].

Pats pagrindinis šio darbo tikslas yra duoti metodą, kuris virš nurodytą spragą užpildytų. Visų pirma nurodome, kaip galima sistematiniai gauti (III) dalinės diferencialinės lygties aibes specialinių sprendinių. Toliau parodome, kaip sistematiniai gaunami šių funkcijų teorijai pirmaeilės reikšmės turintieji integralinių lygčių pavyzdžiai. Pasirodo, kad literatūroj žinomos šių funkcijų integralinės lygtys, yra šiuo mūsų metodu gautų integralinių lygčių aibių specialūs atvejai. Kartu gauname neaprėžtą skaičių naujų integralinių lygčių (II) tipo, o žinomosios šių funkcijų integralinės lygtys įjungiamos į sistematiškesnį vaizdą.

Pagrindinė mintis, vedanti į šį tikslą, yra ši: paimame diferencialinę lygtį

$$\text{(IV)} \quad \frac{d}{ds}\left(g\,(s)\frac{dw}{ds}\right)+\left(r\,(s)+\mu\right)w=0,$$

kurios sprendiniai yra žinomi, ir sudarome ją atitinkančią dalinę diferencialinę lygtį

$$\text{(V)} \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(g\,(s)\frac{\partial K}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(g\,(t)\frac{\partial K}{\partial t}\right)+\left(r\,(s)-r\,(t)\right)K=0,$$

kurią atitinkamu koordinatų pakeitimu suvedame į (III) diferencialinę lygtį. Įvedę tą patį koordinatų pakeitimą į žinomąjį (V) diferencialinės lygties sprendinį $K(s,t)=w(s)w(t)$, gauname (III) diferencialinės lygties sprendinį. Aišku, kad, pereinant nuo (V) į (IV) lygtį, ypatingą rolę lošia čia specialioji sprendinio forma $K(s,t)=w(s)w(t)$. Bet (V) diferencialinės lygties simetrija čia nėra būtinai reikalinga: svarbu tik, kad dalinės diferencialinės lygties, kuri atitinkamais pakeitimais yra suvedama į (III) diferencialinę lygtį, sprendiniai būtų žinomi arba specialiais pakeitimais lengvai surandami. Jei (V) lygtis nėra simetriška, tai vietoje vienos (IV) paprastos diferencialinės lygties atsiranda dvi skirtingos.

Klausimas, kaip nustatyti bendruosius koordinatų pakeitimus, kuriais (V) diferencialinė lygtis suvedama į (III), išsprendžiamas metodu, kurį, benagrinėdamas savo équtions harmoniques, yra davęs Darboux[30]. Todėl mūsų šių klausimų tyrinė-

[30] Darboux, l. c.[8].

jimas yra artimai susijęs su klasiškąja diferencialinių lygčių forma, kurią vartojo Darboux.

Taikydami šį virš išdėstytą metodą atskiriems klausimams spręsti, daugiausia dėmesio kreipėme į Lamé funkcijas, kurios, mūsų nuomone, čia kaip tik tinka šio metodo reikšmei paryškinti. Kita vertus, literatūroj yra žinomi tik atskiri Lamé funkcijų integralinių lygčių pavyzdžiai, kurių ypatingosios funkcijos turi polinominę formą. Bet ir šis specialus Lamé funkcijų integralinių lygčių atvejis iki šiol nėra kaip reikiant ištirtas. Todėl dar vis pasirodo iš Lamé polinomų integralinių lygčių naujų darbų, kur svarbiausią darbo dalį užima įrodymas, kad intuityviai nujaustas branduolys yra (III) diferencialinės lygties sprendinys. Šiame darbe mums, atrodo, Lamé polinomų atvejį pavyko išspręsti.

Literatūroj žinomos Lamé polinomų integralinės lygtys rodyte rodo, kad ryšiui tarp (I) ir (II) lygčių nustatyti ypatingą reikšmę reikia skirti h-tos eilės Legendre'o funkcijų diferencialiniai lygčiai (§ 2). Norėdami branduolius išreikšti per funkcijas, kurių savybės yra gerai žinomos, įvedame Laplace'o rutulinių funkcijų diferencialinę lygtį. Reikia pastebėti, kad gauname ypatingai paprastos formos sprendinius, jei į Laplace'o diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{dy^2} + \frac{\partial^2 w}{\delta z^2} = 0$$

įvedame polines koordinatas ir „bendrąjį“ šios lygties sprendinį taikome specialiai išraiškai $w = f(r)K(\vartheta,\varphi)$. Pabaigoj šio paragrafo duodame dar Laplace'o rutulinių funkcijų diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį, kurio, regis, literatūroje nėra.

Toliau (§ 3) duodame bendros transformacijos formulas, kurios Laplace'o rutulinių funkcijų diferencialinę lygtį suveda į Lamé dalinę diferencialinę lygtį. Pagrindinė šių formulų reikšmė yra toji, kad, pasirinkę specialias konstantų reikšmes, galime žymiai suprastinti atskirus reiškinius, kuriais naudodamiesi gauname paprastos formos Lamé dalinės diferencialinės lygties sprendinius. Be to, panaudoję šias formulas, parodome, kaip žinomieji Laplace'o rutulinių funkcijų diferencialinės lygties sprendiniai gali būti panaudojami ir kitų gimininių funkcijų integralinėms lygtims gauti.

2 ir 3 paragrafų rezultatai betarpiai duoda Lamé polinomų ir funkcijų integralines lygtis (§ 4). Atrodo, kad iš šių rezultatų čia pat gautos išvados sudaro Lamé polinomų integralinių lygčių teorijai pagrindą. Šio paragrafo pabaigoj duodame ir bendresnių Lamé funkcijų integralines lygtis. Tokių integralinių lygčių, kurių sprendiniai tam tikra prasme nėra polinomai, taip pat literatūroj matyti neteko.

Pagaliau mums rodėsi tikslinga išvesti ir Mathieu funkcijų integralines lygtis (§ 6). Visų pirma šias lygtis ribų metodu išvedame iš Lamé funkcijų integralinių lygčių, o po to jas gauname, taikydami tiesiog Mathieu dalinei diferencialinei lygčiai mūsų čia duotąjį metodą. Šis pavyzdys paryškina natūralų šio metodo pagrindą. Kita vertus, jis rodo, kad mūsų metodas taikytinas ir gimiringoms funkcijoms: ribų metodas čia yra tuo nepatogus, kad dažniausiai sprendiniams gauti reikia pirma įvesti tam tikrus pakeitimus, kuriuos kartais ir ne taip jau lengva numatyti. Ir čia mūsų metodas duoda neaprėžtą skaičių naujų integralinių lygčių.

Norėdami įrodyti, kad visos literatūroj žinomos Lamé polinomų integralinės lygtys įeina į šio darbo bendruosius rezultatus kaipo specialūs atvejai, turėjome mūsų metodo formulas bei lygtis pritaikyti tam atvejui, kai šių funkcijų tyrinėjimo pagrindan yra dedama Weierstrass'o eliptiškoji $\wp$-funkcija (§ 5). Tokiu būdu gauname svarbų rezultatą: visų literatūroj žinomų Lamé polinomų integralinių lygčių branduoliai yra Laplace'o rutulinės funkcijos.

Baigdami pastebime, kad šio metodo pagrindinė mintis neapsiriboja vien antros eilės tiesinėmis diferencialinėmis lygtimis: ji gali būti taikoma ir tiesinei homogeninei n^{tos} eilės lygčiai, kurios koeficijentai yra periodiniai. Šiuo atveju reikia tik turėti galvoj, kad abu operatoriai $L_s(K)$ ir $L_t(K)$ turi būti vienas kitam prijungtiniai.

Kaunas,
V. D. U. Matematikos Seminaras.
1939 m. sausio mėnuo.

V. D. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto leidiniai:

1. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, I tomas 1922 m. 10.—
2. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, II tomas 1923 m. 10.—
3. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, III tomas 1924—1926 m. ..... 20.—
4. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IV tomas 1927—1928 m. ..... 25.—
5. Prof. P. Matulionis. Sumedėjusių augalų skirstymui medžiaga 1923 m. ..... 3.—
6. Prof. T. Ivanauskas. Vadovėlis vabzdžiams rinkti 1924 m. 3.50
7. Prof. K. Regelis. Vadovėlis augalams rinkti 1925 m. ..... 2.—
8. Lab. A. Minkevičius. Bulvių puvimo grybelis ir kaip su juo kovoti 1926 m. ..... —
9. Prov. K. Grybauskas. Paletrūnas oželinis 1926 m. ..... —
10. Prov. K. Grybauskas. Garstyčia baltoji 1926 m. ..... —
11. Prov. K. Grybauskas. Vaistingieji Lietuvos laukų augalai ir jų pritaikymas 1927 m. ..... 5.—
12. Prof. V. Čepinskis. Elektroninė valentingumo teorija 1928 m. .. 6.—
13. B. Kodatis. Astronomijos paskaitos I d. ..... 10.—
14. B. Kodatis. Astronomijos paskaitos II d. ..... 10.—
15. Prov. K. Grybauskas. Ramunėliai, antroji laida 1928 m. 0,15
16. Prov. K. Grybauskas. Pipirmėtė, antroji laida 1928 m. 0,20
17. Asist. A. Žvironas. 18 Fizikos praktikos darbų 1928 m. ..... 2.—
18. Prov. K. Grybauskas. Ybiškė švelnioji 1928 m. 0,50
19. O. Volk'as. Aukštoji algebra ..... 10.—
20. Prof. O. Volk'as. Paprastųjų ir dalinių diferencialinių lygčių teorijos paskaitos 1929 m. ..... 20.—
21. Prof. F. Butkevičius. Elementarinis kokybinis analizis 1929 m. 20.—
22. Prof. V. Čepinskis. Cheminė pusiausvyra, II dal. 1930 m. ..... 15.—
23. Prof. V. Čepinskis. Cheminė kinetika ir fotochemija, III dal. 1930 15.—
24. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, V t. 1 sąsiuv. 1930 m. ..... 15.—
25. Prof. F. Butkevičius. Retųjų elementų kokybinis analizis 1931 m. 5.—
26. Prof. T. Ivanauskas. Vadovėlis Lietuvos paukščiams apibudinti 1931 m. ..... 10.—
27. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, V tomo 2 sąsiuvinys 1931 m. ..... 15.—

28. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 1 sąsiuvinys 1931—1932 m. ..... 3.—
29. Inž. A. Zubrys. Organinės chemijos praktikos darbai 1931 m. .. 8.—
30. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo Geografijos sąsiuvinys 1931—1932 m. ..... 10.—
31. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 2 sąsiuvinys, Geologijos skyrius 1931—1932 m. ..... 10.—
32. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 1 sąsiuvinys, Botanikos skyrius 1931—1932 m. ..... 15.—
33. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 2 sąsiuvinys, Fizikos skyrius 1931—1932 m. ..... 6.—
34. V. Čepinskis. Elektrochemija (Fizinės chemijos IV d.) ..... 10.—
35. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 3 sąsiuvinys, Zoologijos skyrius 1932—1933 m. ..... 15.—
36. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 3 sąsiuvinys, Geologijos-skyrius 1933—1934 m. ..... 7.—
37. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 4 sąsiuvinys 1933 m. ..... 7.—
38. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VIII tomas 1934. 20.—
39. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 1 sąs., Zoologijos skyrius 1935 m. ..... 5.—
40. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 2 sąsiuvinys, Botanikos skyrius 1935 m. ..... 6.—
41. Prof. K. Regelis, Augalų sistematika, I dalis 1935 m. ..... 10.—
42. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 3 sąsiuvinys, Mineralogijos ir Geologijos skyrius 1935 m. ..... 8.—
43. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, X tomo 1 sąsiuvinys, Fizikos ir chemijos skyrius 1936 m. ..... —
44. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, XI tomo 1 sąsiuvinys, Matematikos skyrius 1937 m. ..... 1.—
45. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, XI tomo 2 sąsiuvinys, Geografijos skyrius, 1937 m. ..... —
46. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, XI tomo 3 sąsiuvinys, Fizikos ir chemijos skyrius, 1937 m. ..... —
47. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, XI tomo 4 sąsiuvinys, Biologijos skyrius, 1937 m. ..... —
48. V. D. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, XII tomo 1 sąsiuvinys, Fizikos skyrius, 1938 m. ..... —

V. D. U. MATEMATIKOS-GAMTOS FAKULTETO LEIDINIAI PARDUODAMI KOOPERACIJOS BENDROVĖJE

„SPAUDOS FONDE“
KAUNAS, LAISVĖS AL. NR. 62.